

Dalle onde d'acqua alla lava

pillole di fluidodinamica e simulazioni

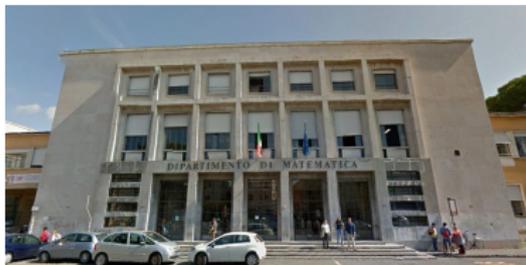
Elisa Biagioli



Da dove vengo? Cosa ho fatto?

Laurea Triennale

PISA in Matematica Applicata



Laurea Magistrale

GENOVA in Matem. Applicata



Outline



1 Introduzione

Matematica Applicata
Vulcani
Simulazioni

2 Fluidodinamica

(1) Punto di vista fisico
(2) Traduzione in "matematiche"
(3) Passare al computer

3 Considerazioni finali

Mi piace la matematica applicata! 1/4

...ma di cosa si occupa?

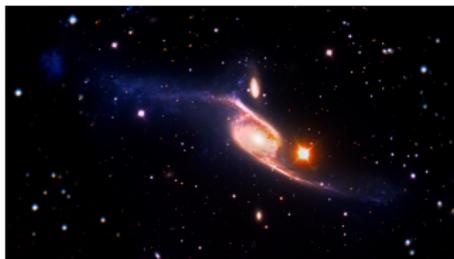
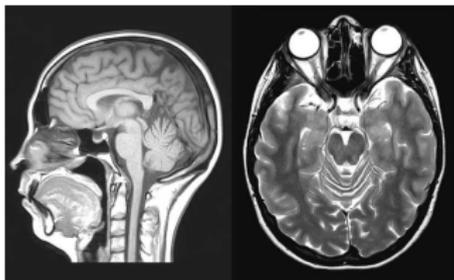
Economia/finanza



Informatica

Google

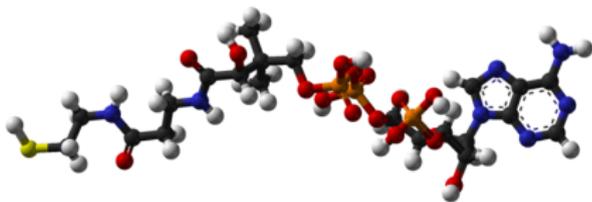
Immagini mediche, astronomiche, arte, riconoscimento facciale, ...



Mi piace la matematica applicata! 2/4

...ma di cosa si occupa?

Biologia modellare molecole, sciami d'api ...



Musica

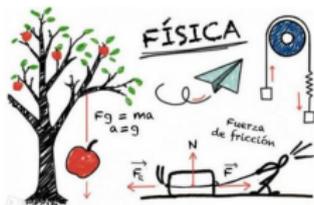
Crittografia & sicurezza



Mi piace la matematica applicata! 3/4

...ma di cosa si occupa?

Fisica-matematica usiamo il linguaggio e le tecniche matematiche per descrivere i fenomeni naturali espressi tramite leggi della fisica



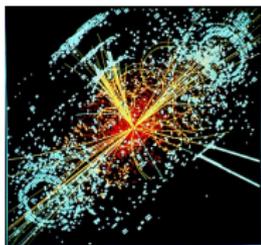
Caduta dei corpi



Previsioni del tempo



Moto degli astri



Particelle e alte energie



Comportamento del calore

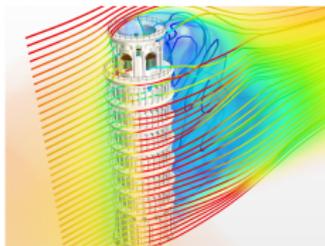


Corpi elastici

Mi piace la matematica applicata! 4/4

...ma di cosa si occupa?

Fisica-matematica ... FLUIDODINAMICA!



Moto dell'aria



Materiali viscosi



Onde nel mare



Frane e valanghe

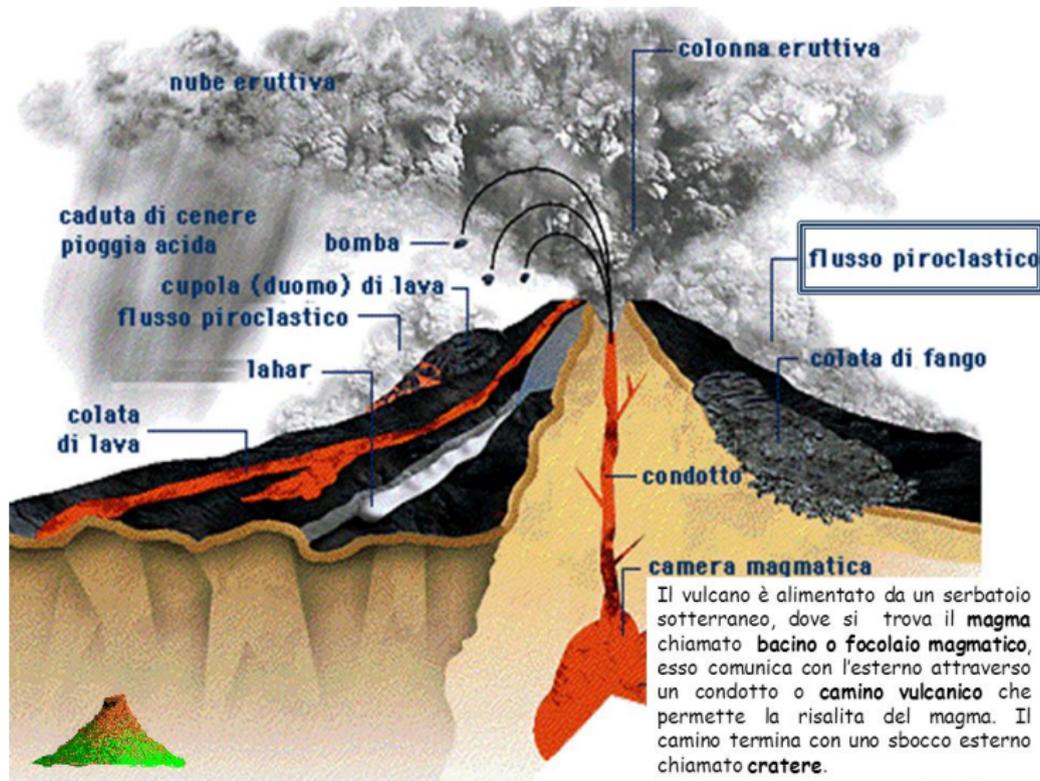


Fiumi e canali



Fenomeni vulcanici

Fenomeni vulcanici



Fenomeni eruttivi

Le **eruzioni vulcaniche** sono tra i disastri naturali **più distruttivi** che accadono sul nostro pianeta, classificati in due tipi:

- Esplosivi



Explosive eruption of Mount Fuego (Guatemala), 2015.

From: www.volcanodiscovery.com

- Effusivi



Effusive eruption of Mount Kilauea (Hawaii), May 2018.

From: www.volcanodiscovery.com

Cosa accade quando la lava incontra l'acqua, per esempio quella del mare?

Fenomeni eruttivi

Figure: Immagini satellitari vicino alla Baia di Kapoho nella Big Island (Hawaii), prima e dopo la propagazione della colata di lava del vulcano Kilauea, Giugno 2018.

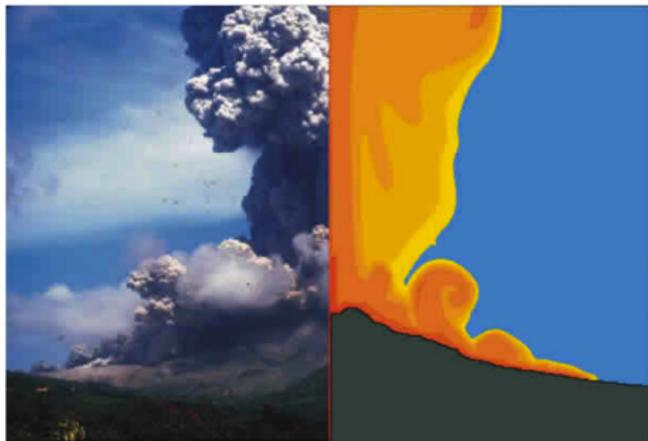
From: www.thetimemagazine.com



Rischi e danni associati ai fenomeni eruttivi richiedono una *descrizione quantitativa* di questi eventi (e non solo qualitativa). Si cercano previsioni affidabili con l'uso di **simulazioni matematiche** al computer.

Simulazioni matematiche & previsioni

Cercando di riprodurre il fenomeno vulcanico tramite le **simulazioni matematiche** al computer, si tenta di prevedere i possibili scenari eruttivi e quindi pianificare piani di evacuazione e di sicurezza per la popolazione.



Cosa faccio per davvero?

Simulazioni realistiche di colate di lava



Simulazioni realistiche

- 1 Studio del fenomeno dai punti di vista fisico e geologico.
- 2 Tradurre il problema in termini matematici.
- 3 Risolvere il problema matematico col computer ri-traducendolo per lui.

Legenda:

T=1350°

T=825°

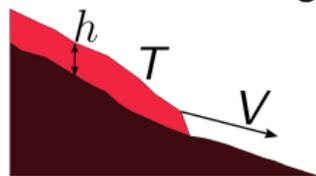
T=300°

Eruzione effusiva sul fianco sud dell'Etna

Modellare eventi effusivi

Consideriamo la lava come un fluido *viscoso* che scorre con la *superficie libera*, la cui **dinamica** è descritta completamente da 3 incognite principali:

- h = spessore della lava;
- V = velocità;
- T = temperatura.



Modello semplificato della lava.

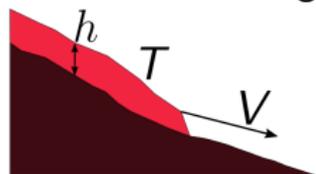
Ulteriori cose da tenere in considerazione nel modello

- ▶ la **temperatura** dipende dallo scambio di calore fra la lava e l'ambiente, il suolo ...
- ▶ il fluido è **viscoso** e la *viscosità* dipende dalla temperatura,
- ▶ la formazione di **cristalli** dipende dalla temperatura e dalla composizione chimica ed influenza la viscosità,
- ▶ potrebbe formarsi una **crosta superficiale**, per cui la lava poi si troverebbe a scorrere in un tubo cambiando tipo di dinamica...

Modellare eventi effusivi

Consideriamo la lava come un fluido *viscoso* che scorre con la *superficie libera*, la cui **dinamica** è descritta completamente da 3 incognite principali:

- h = spessore della lava;
- V = velocità;
- T = temperatura.



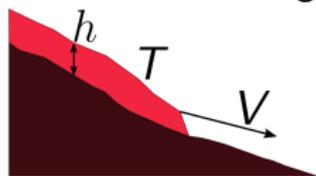
Modello semplificato della lava.



Modellare eventi effusivi

Consideriamo la lava come un fluido *viscoso* che scorre con la *superficie libera*, la cui **dinamica** è descritta completamente da 3 incognite principali:

- h = spessore della lava;
- V = velocità;
- T = temperatura.

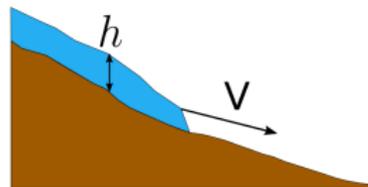


Modello semplificato della lava.

SEMPLIFICARE!!

Consideriamo **ACQUA** come un fluido che scorre con la *superficie libera*, la cui **dinamica** è descritta completamente da 2 variabili:

- h = spessore dell'acqua;
- V = velocità.



Modello semplificato per acqua.

Leggi di conservazione

I principi fisici

In fluidodinamica i fenomeni rispettano varie **leggi della fisica** fra cui queste tre dette *Principi di Conservazione*:

- ▶ **Conservazione della massa:** la massa di un sistema completamente isolato rimane invariata nel tempo.
- ▶ **Conservazione del momento** (analoga alla seconda Legge di Newton): se non agiscono forze esterne in un sistema chiuso di oggetti, la quantità di moto rimane invariata.
- ▶ **Conservazione dell'energia:** l'energia totale di un sistema isolato rimane invariato nel tempo.

Da questi 3 principi discendono equazioni che esprimono:

- l'*evoluzione* nel tempo delle 3 grandezze (h, V, T);
- le *relazioni* che legano queste grandezze tra loro.

Approccio Lagrangiano & Euleriano

Quale punto di vista scegliere?

Il moto si può descrivere seguendo due differenti approcci:

Lagrangiano FISSO ALLA PARTICELLA



Dobbiamo seguire ogni singola particella di fluido!

Quando può essere utile questo punto di vista?

Euleriano FISSO ESTERNO



Monitoriamo cosa accade alle caratteristiche del fluido in un fissato volume di controllo *immaginario*.

Descrizione Euleriana (FISSO ESTERNO)

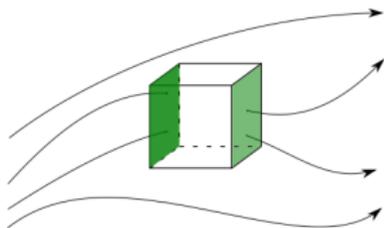
Equazione di continuità

Conservazione della massa

La massa di un sistema completamente isolato rimane invariata nel tempo.

Lo ripetiamo esprimendolo in descrizione EULERIANA!

Fissiamo un *volume immaginario* nel flusso che scorre:



Eq. di continuità

La variazione nel tempo della massa all'interno del volume immaginario dipende da quanta massa attraversa la superficie del volume immaginario in entrata ed in uscita.

Le equazioni

Equazioni differenziali alle derivate parziali per l'**ACQUA**, per esempio:

$$\begin{cases} h_t + (hV)_x = 0 \\ (hV)_t + \left(hV^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x = -ghB_x \end{cases}$$

Descrivono come le nostre incognite cambiano nel **tempo** e nello **spazio** e come si relazionano fra di loro.

Problema: queste equazioni non possono essere risolte **direttamente**, cioè con carta e penna.

Soluzione: studiamo le loro *caratteristiche matematiche* per trovare un metodo efficace per calcolarne **soluzioni approssimate** col computer.

Approssimazioni

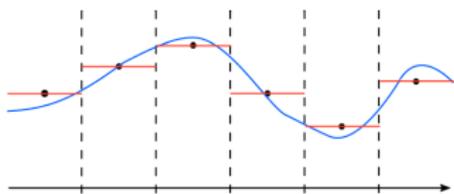
N.B.: Fino qui sono già state fatte molte approssimazioni, ma a livello del modello!

Modello numerico

La matematica a contatto con l'informatica

Dal continuo al discreto

- Tempo: $t \rightarrow t_1, t_2, t_3, \dots$
- Spazio
- Spessore: $h \rightarrow h_1, h_2, h_3, \dots$
- Velocità: $V \rightarrow V_1, V_2, V_3, \dots$
- Temperatura: $T \rightarrow T_1, T_2, T_3, \dots$



Infine passiamo a scrivere il programma al computer e poi lo TESTIAMO e validiamo sia confrontandolo con esempi tratti dalla letteratura scientifica sia con applicazioni reali.

Quando l'acqua scorre!

Dati: Fluido isotermico e **viscoso**, con dato iniziale discontinuo (sistema chiuso ai bordi del dominio + diga) e uno **stato asciutto**.

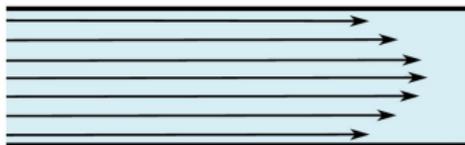
Test: preservare la positività di h , osservare uno stato stazionario.

Problemi RIGIDI

Come una Ferrari in 1°

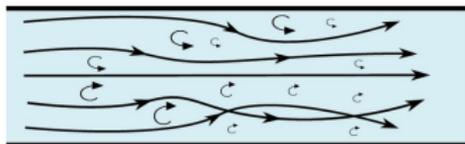
Esistono fenomeni fisici in cui possono distinguersi eventi che hanno *scale temporali caratteristiche* molto diverse:

laminar flow



Un'unica scala temporale, perché la dinamica del flusso è piuttosto omogenea.

turbulent flow



Due scale temporali: una per il flusso ed una molto più ridotta per i piccoli vortici.

Quante approssimazioni?

Ricordiamo la struttura del procedimento:

Modello Fisico \rightarrow Equazioni Matematiche \rightarrow Calcolo al computer

Dove abbiamo approssimato?

- Nella formulazione del modello: semplifichiamo molto la complessità dei fenomeni.
- Nel fare i conti al computer: passando dal continuo al discreto.
- Nel fare i conti al computer: molte operazioni matematiche assai complesse vengono approssimate da calcoli più semplici.

Grazie della vostra attenzione